

第 12 届南京理工大学程序设计大赛 分析

颜俊梁

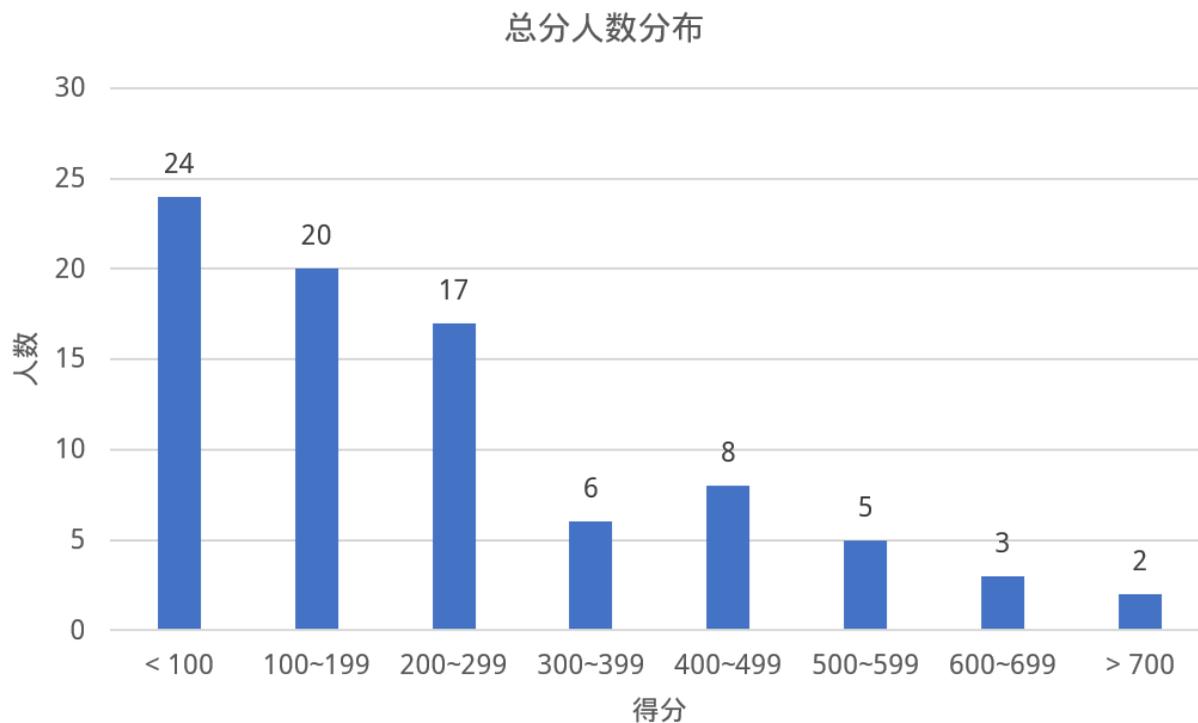
整体情况

总共有 89 名同学到场提交过代码，其中 86 名同学得到分数。

🏆 冠军：金朝哲 764 分

🥈 亚军：陈涣焕 748 分

🥉 季军：蔡佳铭 645 分



整体情况

在 4 小时内总共产生了 1528 次有效提交。

最多有人竟然提交了 48 次，最少有人只提交了 3 次。

平均每个人提交了 17.17 次。

平均每次提交得到了 13.54 分。

整体情况

题目难度分布：

Very Easy: A B

Easy: G

Medium Easy: C E J

Medium: D I

Medium Hard: F H K

题目	通过人数	Tag
A	39	实现
B	40	概率期望
G	8	数学归纳
C	10	模拟 栈
E	13	博弈论
J	1	最小生成树 字典树
D	2	KMP 数论
I	1	计算几何 数据结构
F	0	概率期望 DP
H	0	贪心
K	0	数论 DP

A. 搭积木

给定两个长度为 n 的数组 h 和 a ，如果存在 $a_i > h_i$ ，输出 -1 ，否则输出 $\sum_{i=1}^n h_i - a_i$ 。

数据范围： $1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq h_i, a_i \leq 10^5$ 。

Tag: 实现

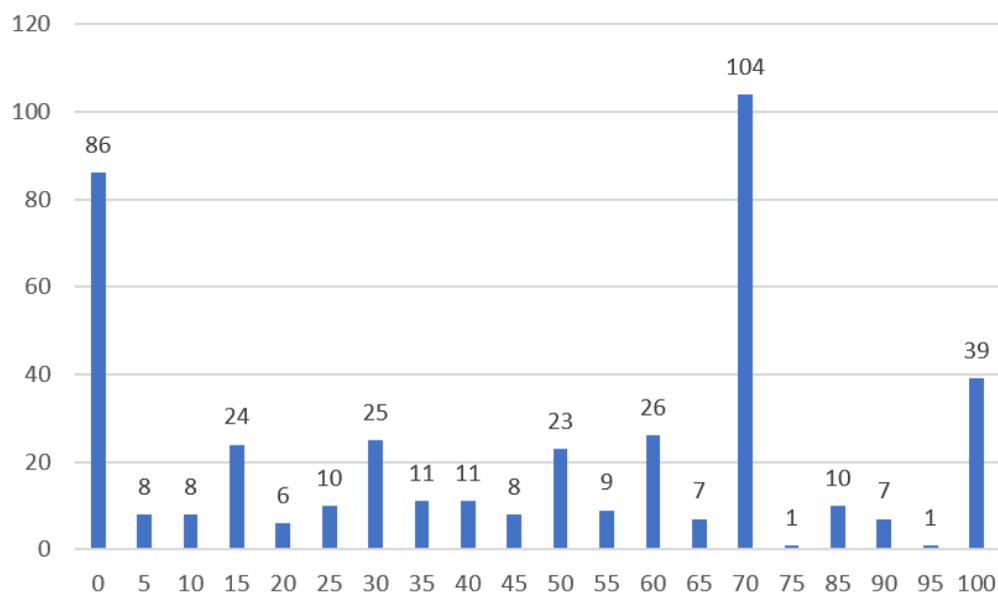
A. 搭积木

一血：谢石林 (3:36, 647B)

最短通过提交：397B

最长通过提交：772B

std 长度：544B



A. 搭积木

按照题面模拟即可。

注意：

- `int` (32 位有符号整数) 的范围是 $[-2147483648, 2147483647]$;
- `unsigned int` (32 位无符号整数) 的范围是 $[0, 4294967295]$;
- $10^5 \times (10^5 - 0) = 10^{10} > 4.3 \times 10^9$ 超过了 `int` 的范围。

B. 梦想协奏曲

假设基础得分为 x ，有 3 种加成卡：

- 普通卡：得分额外增加 $100\% \cdot x$ ；
- 期间限定卡：有 $(100 - p)\%$ 的概率，得分额外增加 $110\% \cdot x$ ，否则得分额外增加 $90\% \cdot x$ ；
- Festival 限定卡：有 $q\%$ 的概率，得分额外增加 $115\% \cdot x$ ，否则没有额外加分。

按照 Festival 限定卡，期间限定卡，普通卡 的优先级选择一张期望得分最高的加成卡。

数据范围： $0 \leq p, q \leq 100$ 。

Tag：概率期望

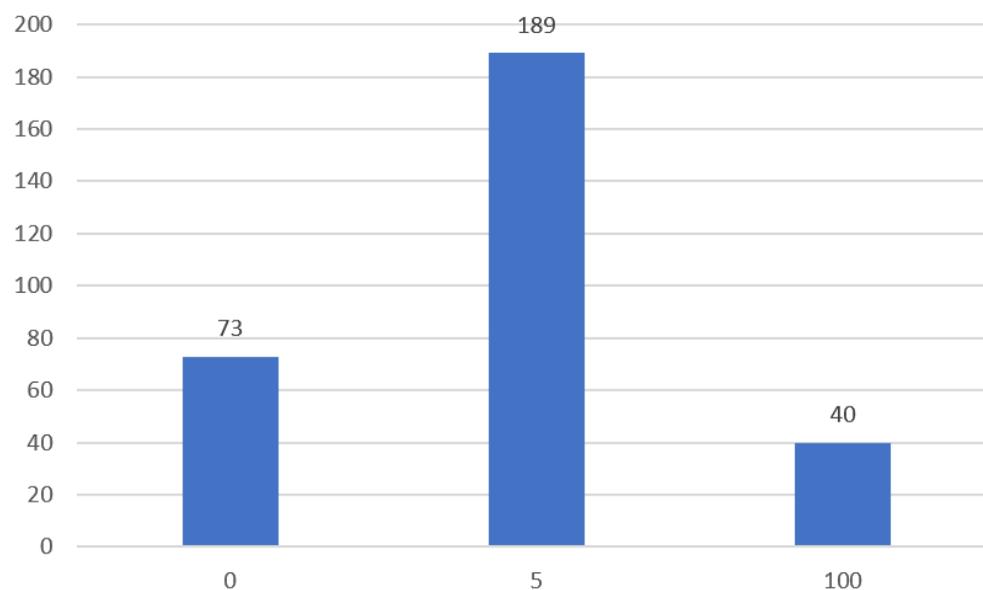
B. 梦想协奏曲

一血：林煊 (11:05, 513B)

最短通过提交：357B

最长通过提交：915B

std 长度：386B



B. 梦想协奏曲

期望得分：

- 普通卡：100；
- 期间限定卡： $\frac{100-p}{100}110 + \frac{p}{100}90$ ；
- Festival 限定卡： $\frac{q}{100}115$ 。

根据优先级比较即可。

注意：使用 `double` 比较时，请小心精度带来的误差。推荐所有结果乘 100 后，使用整数比较。

G. 区间操作

对于一个给定的正整数 k ，定义整数集合上的函数 $f(x)$ ：

$$f(x) = \begin{cases} x - k & x \geq 2k \\ f(f(x + k + 1)) & x < 2k \end{cases}$$

维护一个长度为 n 的数组 a_1, a_2, \dots, a_n ，有以下 2 种操作：

- 将 $[l, r]$ 区间内所有数 a_i 变成 $f(a_i)$ ；
- 询问 $[l, r]$ 区间内小于等于 k 的数的个数。

数据范围： $1 \leq n, q, k \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq k$ 。

Comment： 数据结构？

Tag： 数学归纳法 题面阅读

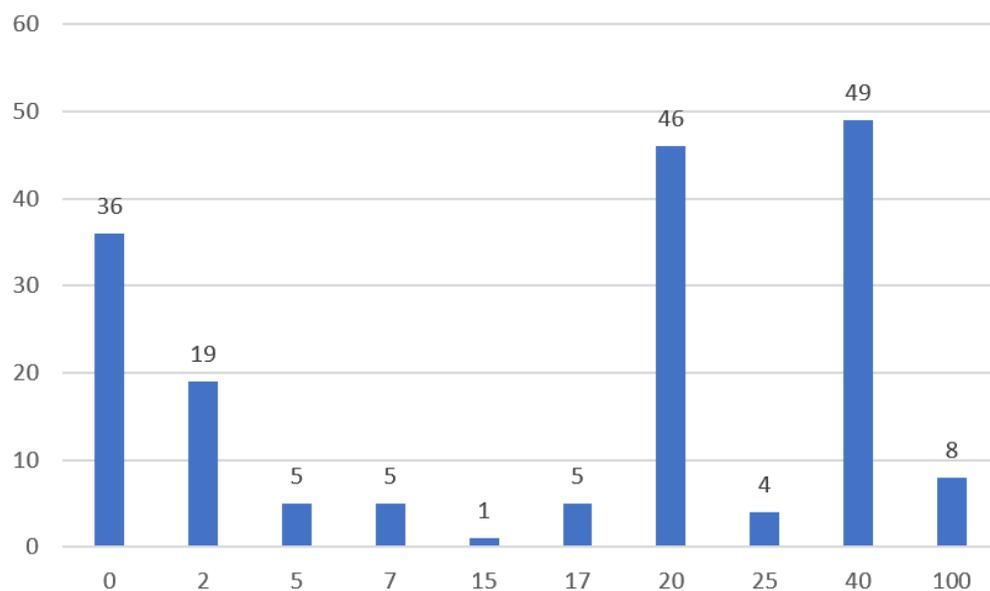
G. 区间操作

一血：江楠 (85:51, 856B)

最短通过提交：318B

最长通过提交：2724B

std 长度：638B



G. 区间操作

当 $k \leq x < 2k$ 时,

$$f(x) = f(f(x + k + 1)) = f(x + 1) = \dots = f(2k) = k$$

当 $1 \leq x < k$ 时,

$$f(x) = f(f(x + k + 1)) = f(k) = k$$

因此, 不论如何进行操作, 所有数都会在 $[1, k]$ 的范围内。对于询问输出 $r - l + 1$ 即可。

Bonus 1: $1 \leq a_i \leq 10^9$?

Bonus 2: 询问区间和?

Bonus 3: 额外支持区间加减, 询问区间和?

C. 类型检查

给定一个长度为 n 的数组 a ，每个位置是一个 1 到 $10^9 + 1$ 的整数。每次选择相邻的一对数，满足左边的数 x 大于 1，右边的数等于 1，将这一对数从数组中删除，并在相应位置加入 $x - 1$ 。重复以上操作，判断数组能否消去到只剩一个 1。

数据范围： $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

Hint：你只需要阅读样例提示。

Tag：题面阅读 模拟 栈

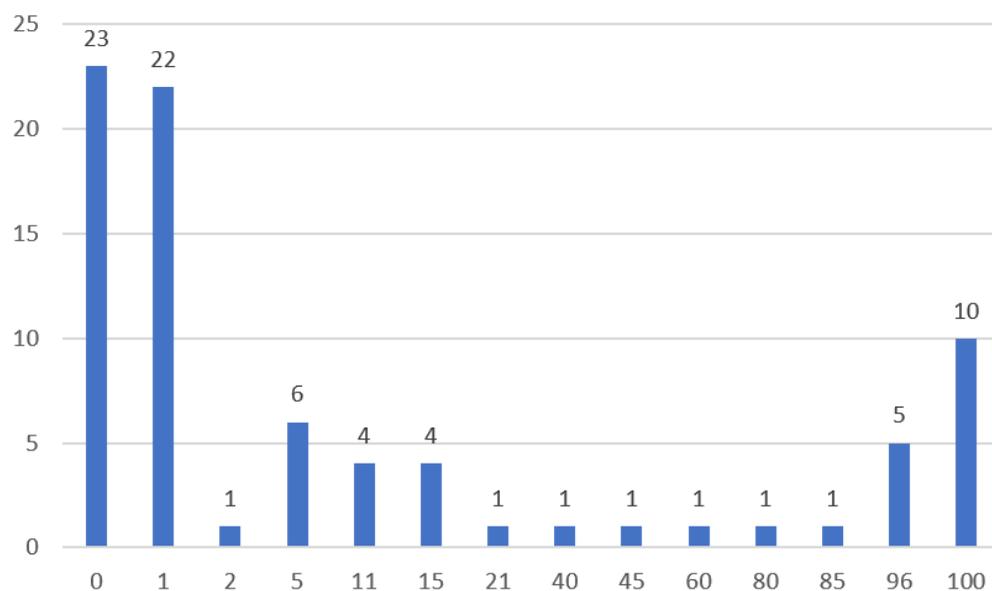
C. 类型检查

一血：金朝哲 (58:17, 1075B)

最短通过提交：807B

最长通过提交：1885B

std 长度：736B



C. 类型检查

样例解释：

$f(2) f(1) \text{ nat nat}$ 相当于 3 2 1 1。

第一步，选择第 2 个和第 3 个位置，变成 3 1 1。

第二步，选择第 1 个和第 2 个位置，变成 2 1。

第三步，选择第 1 个和第 2 个位置，变成 1。

回到原题，对应 $\{f(2) [f(1) \text{ nat}]\} \text{ nat}$ ，类型是 **nat**。

C. 类型检查

从右往左遍历。

如果当前的数是 1 则将其加入栈中；否则是一个正整数 x ，它必须通过栈中多余的 1 进行消去。

如果栈中多余 1 无法将其完全消去为 1，那么不存在方案；否则 x 被消去成为了 1，将其也加入到栈中。

最后，判断剩下的数是不是唯一的 1。

Bonus 1: 以类似方式添加类型定义 $\mathbf{Fin}, g(x) \dots$ ，如何判断？

Bonus 2: 在 1 的基础上，不再给出 $f(x), g(x) \dots$ ，而是给出具体的柯里化函数类型签名，例如 $\mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{List} \rightarrow \mathbf{Fin}$ ，如何判断？

E. 桌游

给定一个长度为 n 的棋盘，每个位置上标有两个数 a_i 和 b_i ，双方轮流操作，每次可以将棋子移动到 $i + a_i$ 或者 $i + b_i$ 两种位置，不能操作的玩家游戏失败。

数据范围： $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq a_i, b_i \leq n$ 。

Tag: 博弈论 DAG

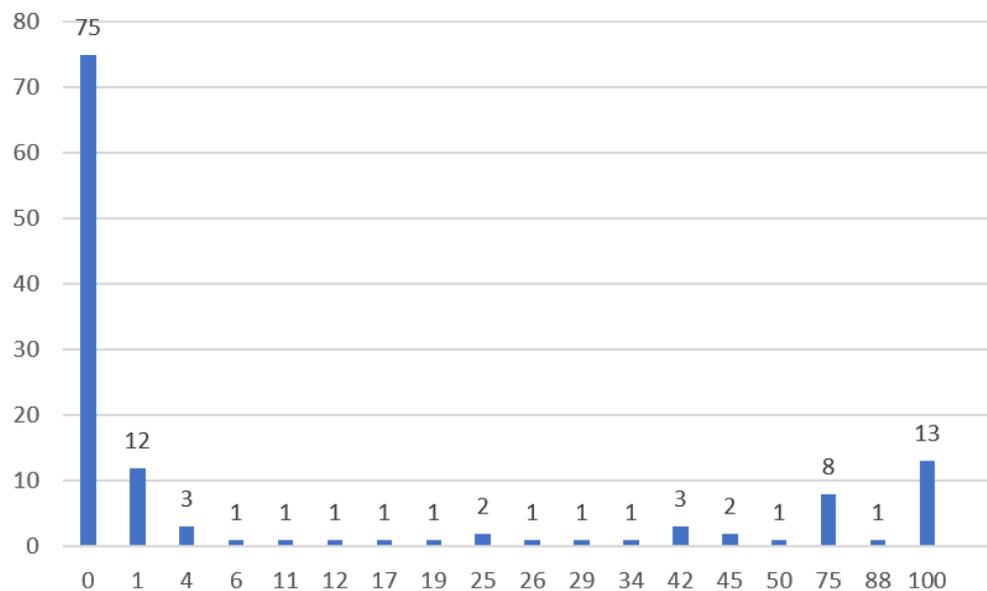
E. 桌游

一血：蔡佳铭 (79:49, 993B)

最短通过提交：482B

最长通过提交：1415B

std 长度：707B



E. 桌游

棋盘的转移边构成了一个 DAG。

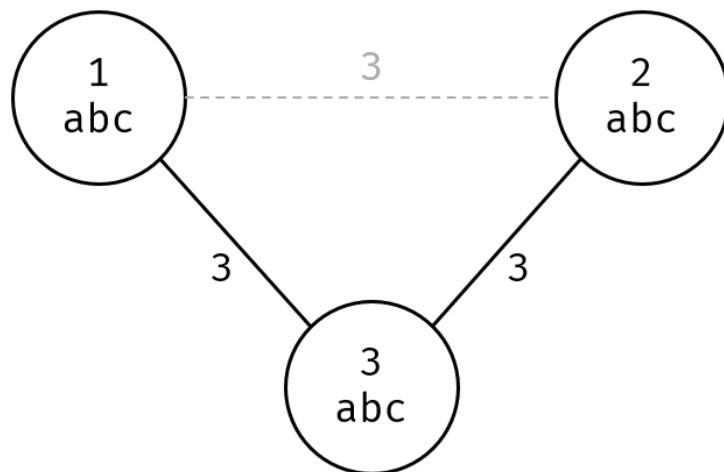
假如状态 i 的两个后继中，存在必败态，那么状态 i 是必胜态；否则是必败态。

从后往前递推。

Bonus: 后缀自动机 fail 树上建 SG 函数 —— A String Game。

J. LCP MST

给定一个 n 个点的无向完全图，每个点 i ($1 \leq i \leq n$) 上都有一个字符串 s_i 。点 i 和点 j 之间边的边权是 s_i 和 s_j 的最长公共前缀的长度。求该无向完全图的最小生成树。



数据范围： $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$, $1 \leq \sum_{i=1}^n |s_i| \leq 2 \cdot 10^6$ 。

Tag: Trie MST 观察

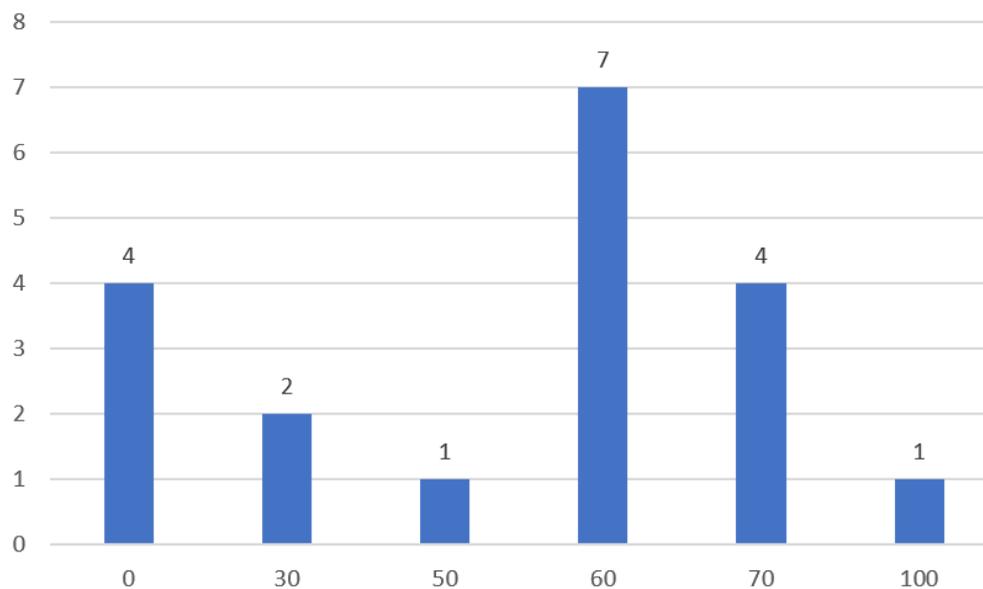
J. LCP MST

一血：金朝哲 (232:40, 938B)

最短通过提交：938B

最长通过提交：938B

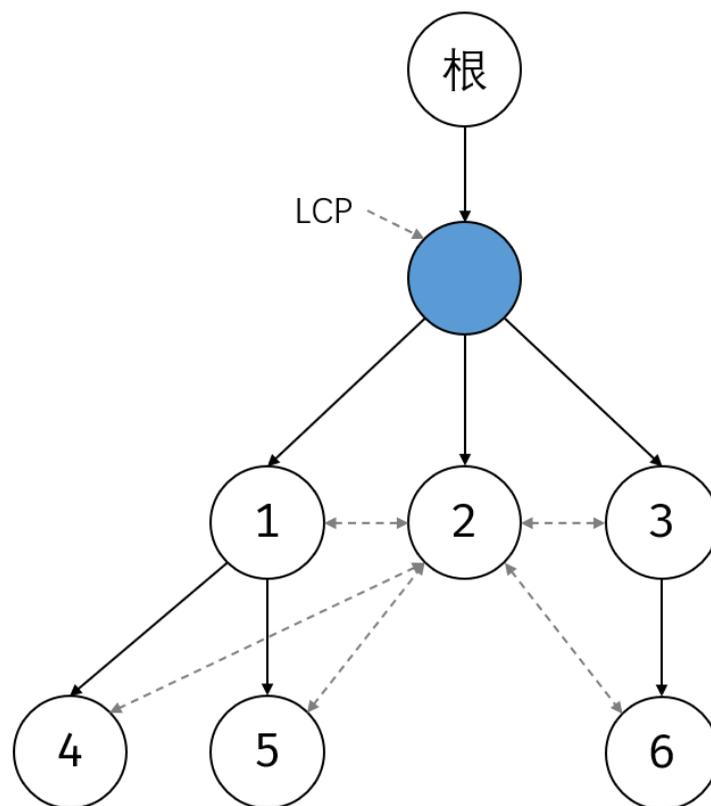
std 长度：440B



J. LCP MST

答案是所有串的最长公共前缀的长度乘 $n - 1$ 。

考虑所有串构成的 Trie 树上，从根节点往下的第一个分裂点，左右连边，所有边的长度都是这个点的深度。



D. 和风摇滚

给定一个小写字母组成的字符串 s ，对它的每一个前缀求有多少个整周期。

整周期指一个字符串的完整循环节。例如， $abab$ 可以看成是一个长度为 4 的串 $abab$ ，也可以看成由 2 个长度为 2 的串 ab 连接而成，因此它具有整周期 2 和 4。

数据范围： $1 \leq |s| \leq 5 \cdot 10^5$ 。

Tag: KMP 因子个数

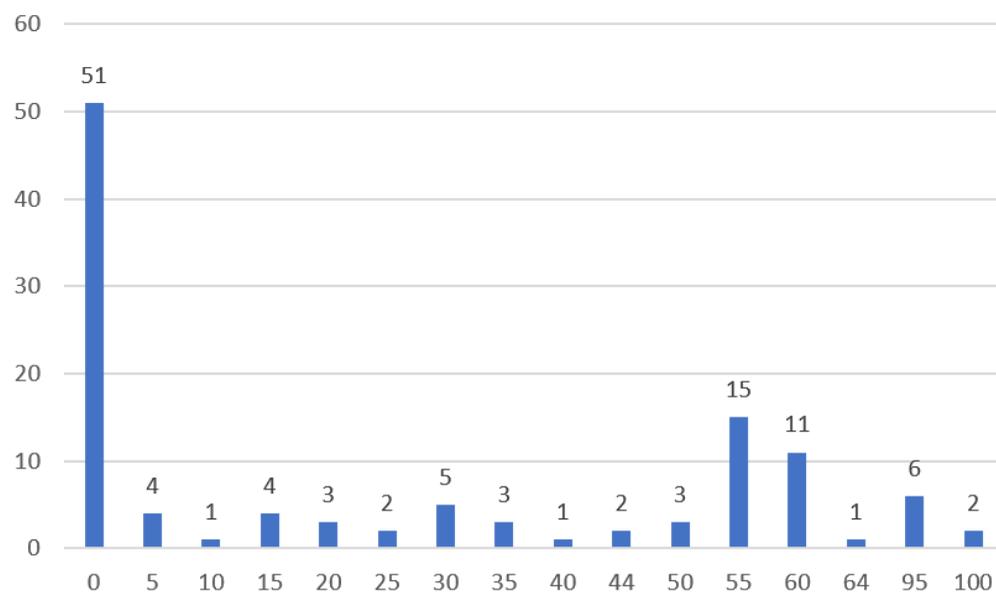
D. 和风摇滚

一血：陈涣焕 (61:08, 1000B)

最短通过提交：918B

最长通过提交：1000B

std 长度：982B



D. 和风摇滚

验题人（金力为）和赛中选手做法：

使用 KMP 算法，求出 s 串的前缀函数（最长公共前后缀），即 $fail(1), fail(2), \dots, fail(|s|)$ 。

对于长度为 i 的前缀，它的最小周期是 $i - fail(i)$ 。

如果最小周期整除 i ，答案是 $\frac{i}{i - fail(i)}$ 的因子个数，否则是 1。

D. 和风摇滚

记字符串 s 长度为 i 的前缀为 $pre(s, i)$ ，长度为 i 的后缀为 $suf(s, i)$ 。

周期：若 $0 < p \leq |s|$ ， $\forall 1 \leq i \leq |s| - p, s[i] = s[i + p]$ ，就称 p 是 s 的周期。

border：若 $0 \leq r < |s|$ ， $pre(s, r) = suf(s, r)$ ，就称 $pre(s, r)$ 是 s 的 border。

D. 和风摇滚

引理 1: t 是 s 的 border, 当且仅当 $|s| - |t|$ 是 s 的周期。

证明:

若 t 是 s 的 border, 那么 $pre(s, |t|) = suf(s, |t|)$, 因此

$$\forall 1 \leq i \leq |t|, s[i] = s[|s| - |t| + i]$$

所以 $|s| - |t|$ 就是 s 的周期。

若 $|s| - |t|$ 为 s 周期, 则

$$\forall 1 \leq i \leq |s| - (|s| - |t|) = |t|, s[i] = s[|s| - |t| + i]$$

因此 $pre(s, |t|) = suf(s, |t|)$, 所以 t 是 s 的 border。

D. 和风摇滚

出题人做法：

对原串跑一遍 KMP 算法，得到每个前缀的最长 border。构造 fail 树，每个点连向它的 fail 点处。

根据上面的引理，周期和 border 是等价的，因此长度为 p 的 border 是前缀 i 的整周期，当且仅当 $i - p | i$ 。

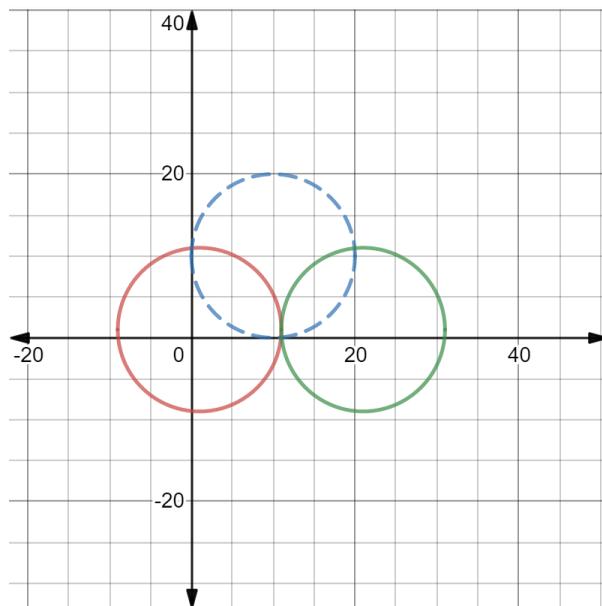
观察 fail 树的结构，可以发现一个点到根的路径上所有点，就是这个点的所有 border。

在 dfs 这棵 fail 树的时候，维护递归栈，记录所有数的出现次数，查询时枚举前缀长度的所有因子得到整周期个数。

Bonus: [\[NOIP2020\] 字符串匹配](#)

I. 积分卡盖章

在二维平面上，有 n 次询问，每次添加一个半径为 R 的圆，如果其与当前存在的圆没有交，输出 Yes，否则输出 No，并删除这个圆。



数据范围： $1 \leq n, x_i, y_i \leq 10^5, 10 \leq R \leq 100$ 。

Tag: 计算几何 跨立实验 分块 数据结构

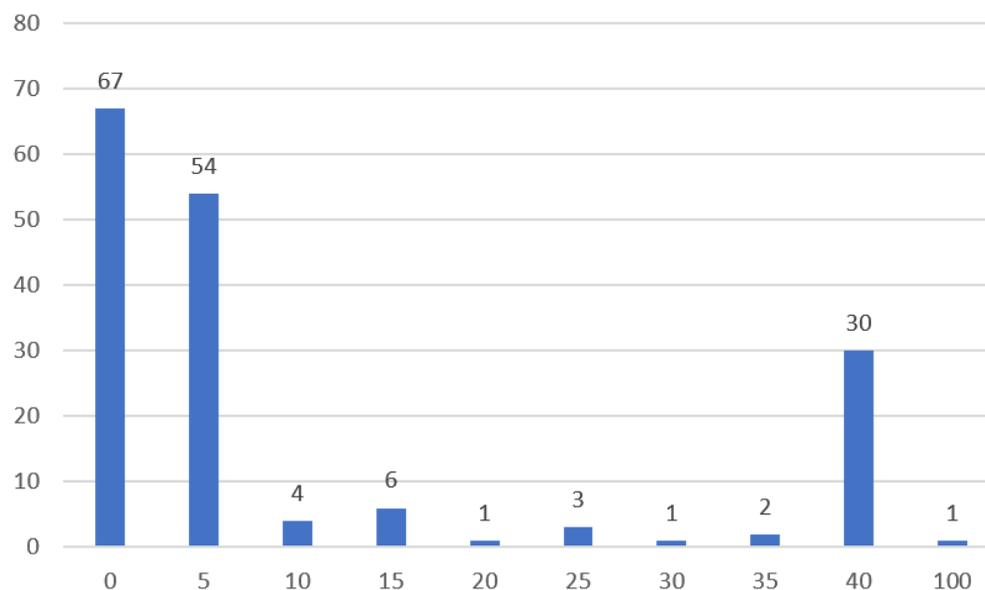
I. 积分卡盖章

一血：金朝哲 (165:11, 1395B)

最短通过提交：1395B

最长通过提交：1395B

std 长度：1263B



I. 积分卡盖章

这是一个看起来就很实用，经典的问题 —— 二维碰撞检测。

可以通过的做法非常多：

- KD-Tree：在 $O(\sqrt{n})$ 的时间内找到距离询问点最近的那个点；
- 四分树；
- 使用二维网格对平面分块；
- 使用一维数轴对平面分段，外加额外的常数优化。

I. 积分卡盖章

出题人做法：

将这个 $10^5 \times 10^5$ 的正方形平面划分为大小 $K > R$ 的网格。

利用跨立实验的思想，可能与一个圆相交的圆会落在所处网格周围的 9 格范围内。

一个网格内期望有 $\frac{K^2}{\pi R^2}$ 个圆。

时间复杂度为 $O(n \frac{K^2}{\pi R^2})$ ，空间复杂度为 $O(\max(\lceil \frac{10^5}{K} \rceil^2, n))$ 。

K 取 400 左右可以通过。

F. 旋律分解

给定一个随机生成的字符串，求回文串分解的方案数。

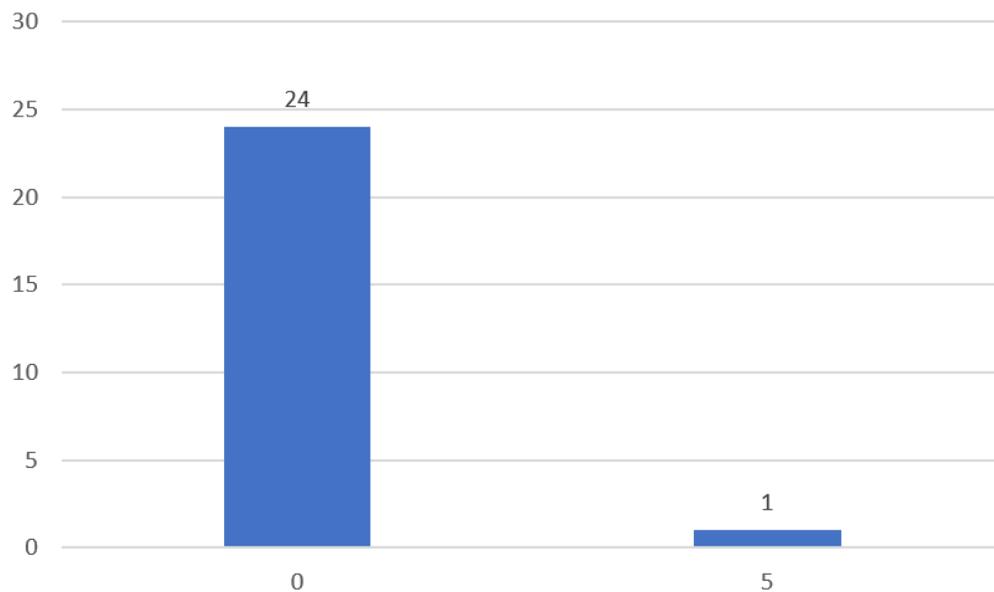
数据范围： $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^6$ 。

Tag: 概率期望 DP

F. 旋律分解

最高得分：5（邓谢喆，638B）

std 长度：1083B



F. 旋律分解

观察: 在一个随机串中, 回文子串个数的期望是 $O(n)$ 的。

暴力找出所有的回文子串。

$f(i)$ 表示以第 i 个结尾时, 回文串分解的方案数。

$$f(i) = \sum_{s[j\dots i] \text{ 是回文串}} f(j-1)$$

Bonus: 字符串不随机? [最小回文划分](#) | [XLor's Blog](#)。

H. 火锅

给定 n 个数，将其重新排列，输出一个字典序最小的数组，要求满足相邻两个数不同，并且首尾数也不相同。

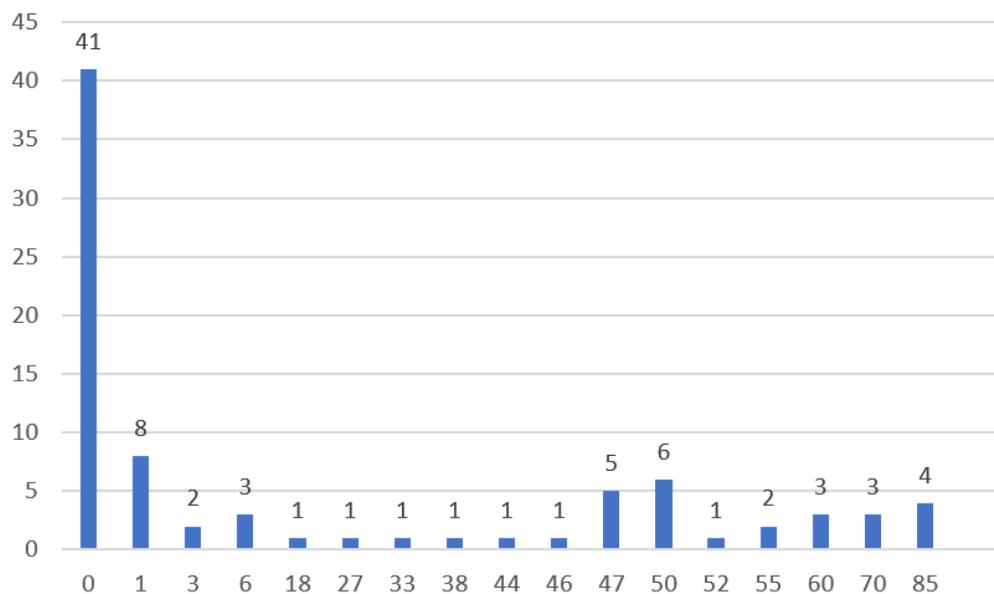
数据范围： $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 1 \leq a_i \leq 200$ 。

Tag: 结论 贪心

H. 火锅

最高得分：85（季若曦，880B；周桢瑜，716B）

std 长度：2319B



H. 火锅

一般的想法：从左到右确定，每一个位置尽量放一个存在合法方案的尽量小的数字。

假如不考虑首尾不同的问题，存在合法的相邻不同的方案，当且仅当出现最多的数字的出现次数 $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ，即间隔着放出现次数最多的那个数。

于是，从左到右逐位确定时，如果剩下的数字满足上述的条件，那么就是合法的。

现在，我们考虑在环上相邻都不同，实际上只需要对于首尾特判即可。此处有较多细节，需要考虑当前放的数字与开头是否相同等情况。

K. 星际巡回演唱会

维护起始位置 $base$ 和技能集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 。

定义可达集合

$$Y = \{y | y = base + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k, x_i \in \mathbb{Z}\}$$

有 3 种操作：

- 如果 $x_i \in Y$ ，分数增加 $happy_i$ ；
- 向 S 中添加一个数 y_i ；
- 修改 $base$ 为 pos_i ，或者什么也不做。

求获得的最大分数。

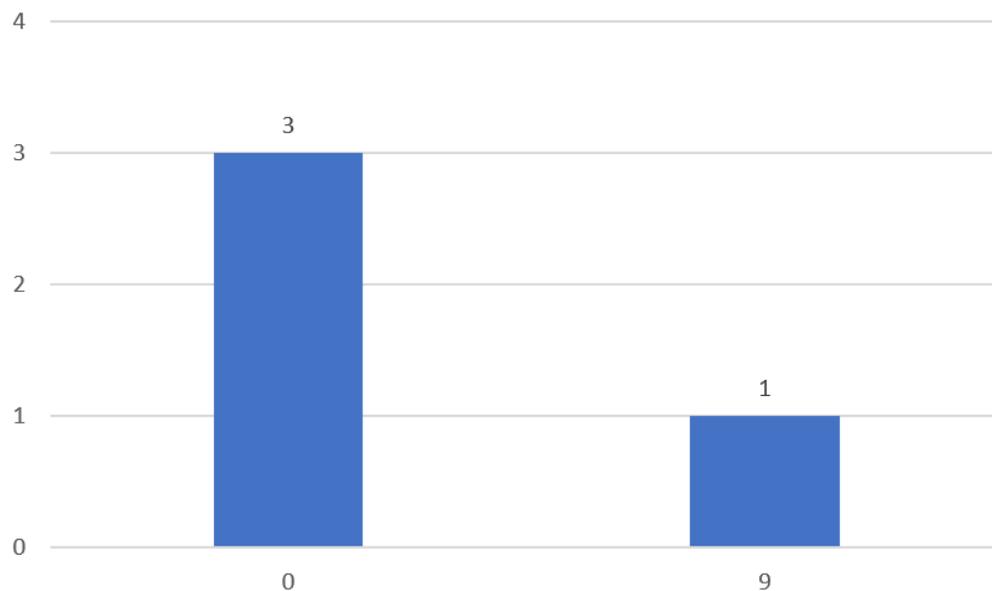
数据范围： $-10^9 \leq x_i, pos_i \leq 10^9, 1 \leq happy_i \leq 10^9, 1 \leq y_i \leq 10^5$

Tag: 裴蜀定理 gcd DP

K. 星际巡回演唱会

最高得分：9（张雄，507B）

std 长度：1762B



K. 星际巡回演唱会

根据裴蜀定理, $Y = \{y | y = base + x \gcd(a_1, a_2, \dots, a_k), x \in \mathbb{Z}\}$ 。

上式意味着, 我们只需要保存 $base$ 和 \gcd 两个信息, 就能生成所有可达的点, 而 \gcd 是随着时间变化的, 因此我们实际需要维护的只有 $base$ 。

进一步地, 可达点的坐标 $\text{mod } \gcd(a_1, a_2, \dots, a_k) = base$ 。因此, 我们可以使用一个数组记录模 \gcd 下每种 $base$ 的最大值。

虽然 \gcd 是会随着时间发生变化, 但是每次 \gcd 发生变化, 其至少也是变成原先的一半, 因此变化至多发生 $\log 10^5$ 次。因此, 在每次变化时, 我们暴力重构之前维护的最值数组即可。

Bonus: [2020 CCPC 秦皇岛 I. Interstellar Hunter](#)。

欢迎提问

谢谢

颜俊梁

2021.3.31

